



UFRJ

Instituto de Física

Semana da Física

03-07/08 de 2015

Algumas estruturas matemáticas em física

*Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar possibilidades
para a sua própria produção ou a sua construção. (Paulo Freire)*

O livro da natureza está escrito em linguagem matemática e somente pode entendê-lo quem aprende essa linguagem. (Galileu Galilei)

Essa frase é uma sintetização livre do seguinte trecho de "Il Saggiatore":

"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola; senza questi è um aggirarse vanamente per un'oscuro laberinto.")

"A filosofia (isto é, a ciência) está escrita neste grandíssimo livro que, continuamente, está aberto diante de nossos olhos (eu quero dizer o universo), mas que não se pode entender se não se aprende a entender a língua, e a conhecer os caracteres, nos quais está escrito. Ele é escrito em língua matemática, e os caracteres são os triângulos, círculos, e outras figuras geométricas, sem cujos meios é humanamente impossível entender uma só palavra; sem esses é um vão caminhar por um obscuro labirinto."

(trad. de Henrique Fleming em <http://www.hfleming.com/confgal2.html>)

Hoje, além dos triângulos, círculos e outras figuras geométricas, poderíamos acrescentar os grupos, os espaços de Hilbert, as variedades...

Resumo do minicurso

As teorias físicas usam uma enorme quantidade de estruturas matemáticas. Elas proporcionam a linguagem natural não somente para formular essas teorias, com suas definições, teoremas e métodos de cálculo, como também para bem compreendê-las. O primeiro passo para usar essas estruturas consiste em entender suas definições e relações com os conceitos físicos. Essas informações costumam estar espalhadas em uma enorme bibliografia e não costumam aparecer logo nas primeiras páginas de cada livro. Daí a possível utilidade de um apanhado geral e panorâmico dessas informações antes de atacar o estudo detalhado e operativo de cada estrutura. Pretendemos apresentar as ideias, as definições básicas e suas relações com os conceitos físicos de algumas poucas estruturas matemáticas de grande uso na Física. Iniciamos com os conceitos matemáticos mais básicos para entendê-las, e abordamos no espírito descrito as estruturas de grupo, anel, corpo, espaço vetorial, álgebras associativas e de Lie; espaço topológico, espaço métrico, variedades e grupos de Lie; espaço de Banach e espaço de Hilbert.

Tópicos

- 1 Conjuntos.
- 2 Relações e funções.
- 3 Indexações.
- 4 Relações de equivalência.
- 5 Grupos.
- 6 Anéis e corpos.
- 7 Espaços vetoriais.
- 8 Subespaços e bases vetoriais.
- 9 Transformações lineares.
- 10 Espaços topológicos.
- 11 Espaços métricos.
- 12 Espaços de Banach.
- 13 Espaços de Hilbert.
- 14 Variedades diferenciáveis.

1. Conjuntos

1.1 Conceitos primitivos: **elemento** (ou ponto), **conjunto** e **pertinência**;

$$x \in A . \quad (1)$$

que se lê, x pertence a A ou A subentende x .

NB: $\neg(x \in A) \iff x \notin A$.

Existe **conjunto vazio**: para qualquer elemento x , $x \notin \emptyset$.

1.2 $A = B \quad :\iff$

$$x \in A \iff x \in B . \quad (2)$$

1.2.1 Propriedades

$$(i) \quad A = A \quad (3)$$

$$(ii) \quad A = B \implies B = A \quad (4)$$

$$(iii) \quad A = B \text{ e } B = C \implies A = C, \quad (5)$$

1.3 $A \subset B \quad :\Longleftrightarrow$

$$x \in A \Rightarrow x \in B . \quad (6)$$

NB: Para qualquer conjunto A , $\emptyset \subset A$.

1.3.1 Propriedades

$$(i) \quad A \subset A \quad (7)$$

$$(ii) \quad A \subset B \quad \text{e} \quad B \subset A \implies A = B \quad (8)$$

$$(iii) \quad A \subset B \quad \text{e} \quad B \subset C \implies A \subset C . \quad (9)$$

NB: Em geral, (ii) é método simples de demonstrar $A = B$.

1.3.2 $A \subset B$ e $A \neq B \iff A$ está **propriamente contido** em $B \iff A$ é **subconjunto próprio** de B .

1.4 Para cada conjunto A , existe um único conjunto $\mathcal{P}(A)$ cujos elementos são todos os subconjuntos de A ; $\mathcal{P}(A)$ é chamado **conjunto potência** de A .

NB: $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

1.5 Um conjunto fica definido se, e somente se, para qualquer x podemos estabelecer se x é ou não elemento do conjunto. Podemos definir um conjunto por meio de uma expressão proposicional: conjunto dos elementos x tais que $Prop(x)$ é verdadeira,

$$\{x \mid Prop(x)\} . \quad (10)$$

1.5.1 Usamos expressões proposicionais que pressupõe um conjunto Γ no qual estão todos os elementos usados para definir os conjuntos em estudo.

1.6 União dos conjuntos A e B é o conjunto

$$A \cup B := \{x \in \Gamma \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} . \quad (11)$$

1.7 Interseção de A e B é o conjunto

$$A \cap B := \{x \in \Gamma \mid x \in A \text{ e } x \in B\} . \quad (12)$$

1.7.1 Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

1.8 Propriedades

$$(i) \quad A \cap B \subset A \subset A \cup B, \quad (13)$$

$$(ii) \quad A_1 \subset A \text{ e } B_1 \subset B \Rightarrow A_1 \cup B_1 \subset A \cup B \text{ e } A_1 \cap B_1 \subset A \cap B. \quad (14)$$

1.9 Propriedades

$$(i) \quad A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad (15)$$

$$(ii) \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad (16)$$

$$(iii) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (17)$$

$$(iv) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ \text{e } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (18)$$

1.10 Diferença entre o conjunto A e o conjunto B é o conjunto

$$A \setminus B := \{x \in \Gamma \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}. \quad (19)$$

1.11 Se $B \subset A$ definimos **complemento** de B em A como sendo o conjunto

$$\complement^A B := A \setminus B. \quad (20)$$

1.11.1 $\complement B := \complement^\Gamma B$.

1.12 Par ordenado constituído pelos elementos a e b é o conjunto

$$(a, b) := \{\{a, b\}, \{a\}\}; \quad (21)$$

a é dito o **primeiro elemento do par** e b , o **segundo elemento do par**.

NB: Se $a \neq b$, $(a, b) \neq (b, a)$, embora $\{a, b\} = \{b, a\}$.

1.12.1 Propriedade essencial dos pares ordenados:

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \text{ e } b = y. \quad (22)$$

1.13 Produto cartesiano dos conjuntos A e B é o conjunto

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}. \quad (23)$$

1.14 Propriedades (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, (24)

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, (25)

(iii) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$. (26)

1.15 Trinca ordenada $(a, b; c)$ dos elementos a , b e c é o conjunto

$$(a, b; c) := ((a, b), c). \quad (27)$$

1.15.1 Propriedade essencial:

$$(a, b; c) = (x, y; z) \Leftrightarrow a = x, \quad b = y \text{ e } c = z, \quad (28)$$

2. Relações e funções

2.1 Uma **relação** $\mathcal{R}$ é uma trinca $(D, C; G)$ na qual D e C são conjuntos e $G \subset D \times C$.

2.1.1 Dizemos que:

$\mathcal{R}$ é uma relação do conjunto D com o conjunto C ;

D é o **domínio** da relação;

C é o **contradomínio** da relação;

G é o **gráfico** da relação.

2.1.2 Se $(x, y) \in G$ dizemos que $\mathcal{R}$ **relaciona** x com y e escrevemos $x\mathcal{R}y$.

2.1.3 Se $C = D$ dizemos que $\mathcal{R} = (D, D; G)$ é uma relação no conjunto D .

NB: Os **relatórios de experimentos em laboratório** tem geralmente a forma de relações: D e C são quantidades disponibilizadas pelos aparatos e instrumentos experimentais, ou quantidades possíveis de se obter como resultados das medições, e G é um gráfico ou tabela que expressa a correlação encontrada entre quantidades de D e de C . Por exemplo, D são as voltagens disponíveis para aplicar em resistores, C as possíveis correntes elétricas em resistores e G os pares constituídos pelas voltagens aplicadas em um dado resitor e as respectivas correntes resultantes.

2.2 Função.

Função é uma relação que relaciona cada elemento de seu domínio com um único elemento de seu contradomínio.

2.2.1 As palavras-chave na definição de função são “cada” e “único”; uma função relaciona “cada” elemento de um conjunto com um “único” elemento de outro conjunto (que pode ser igual ao primeiro).

2.3 Para indicar que uma função $f = (D, C, G)$ tem domínio D e contradomínio C , escrevemos

$$f : D \longrightarrow C \quad (29)$$

Para indicar que (x, y) pertence ao gráfico G da função, não é comum usar as expressões $(x, y) \in G$ ou xfy , mas escrever

$$f : x \longmapsto y \quad (30)$$

ou $y = f(x)$ (também sem parênteses: $y = fx$).

2.3.1 Escrevemos (29) e (30) juntos, na forma $f : D \longrightarrow C : x \longmapsto y$ ou na forma

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow C \\ &: x \longmapsto y, \end{aligned} \tag{31}$$

2.3.2 Dizemos que f : é uma função de D em C ; **leva** ou **transforma** ou **aplica** ou **mapeia** D em C ; **age** em D e **assume valores** em C .

2.3.3 Dizemos que: y é o **valor** de f em x ; y é a **imagem** de x por meio, ou através, de f ; f **leva** ou **transforma** ou **aplica** ou **mapeia** x em y , ou ainda, que f **age** em x e o transforma em y .

2.3.4 Funções também são chamadas: aplicações, mapas, transformações, operadores, operações, indexações, permutações, projeções, formas, funcionais, etc.

2.3.5 Outras notações e nomenclaturas para funções serão apresentadas oportunamente.

2.4 O conjunto de todas as funções de um conjunto A em um conjunto B é denotado por B^A .

NB: O conceito de função é de importância fundamental em matemática e também em física. Em física ela é uma ferramenta conceitual perfeita na descrição de fenômenos e principalmente no enunciado de leis que, de um modo geral, associam univocamente um fenômeno a outro; exemplos notáveis são as leis de movimento da MC e da MQ.

2.5 Duas funções $f_1 = (D_1, C_1; G_1)$ e $f_2 = (D_2, C_2; G_2)$ são iguais se, e somente se, $D_1 = D_2$, $C_1 = C_2$ e $G_1 = G_2$.

2.5.1 Asseguradas as igualdades respectivas dos domínios e contradomínios, a igualdade dos gráficos é equivalente à expressão

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{para todo } x \quad (32)$$

no domínio comum de f_1 e f_2 .

2.6 Imagem de uma função é o conjunto dos elementos do contradomínio que são imagens de elementos do domínio D .

2.6.1 Se $\text{im } f$ é a imagem de $f : D \longrightarrow C$,

$$\text{im } f = \{y \in C \mid y = f(x), x \in D\} . \quad (33)$$

2.6.2 Imagem através de f de um subconjunto A do domínio D é o conjunto

$$f(A) := \{y \in C \mid y = f(x), x \in A\} . \quad (34)$$

2.6.3 É óbvio que $A \subset D \Rightarrow f(A) \subset C$ e que $f(D) = \text{im } f$.

2.7 Pré-imagem através de f de um subconjunto B do contradomínio C é o conjunto

$$f^{-1}(B) := \{x \in D \mid f(x) \in B\} . \quad (35)$$

2.7.1 É óbvio que $B \subset C \Rightarrow f^{-1}(B) \subset D$ (naturalmente, $f^{-1}(B) = \emptyset$ se $B \cap f(D) = \emptyset$) e que $f^{-1}(C) = D$.

2.8 $f : D \longrightarrow C$ é dita **injetora** se para quaisquer x_1 e x_2 em D ,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) , \quad (36)$$

o que é equivalente a $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

2.9 $f : D \longrightarrow C$ é dita **sobrejetora** se $\text{im } f$ for igual ao seu contradomínio,

$$f(D) = C , \quad (37)$$

i.e., todo elemento do contradomínio é imagem de um elemento do domínio.

NB: Funções sobrejetoras são usadas na descrição de processos em que pode haver **perda de informação**, como nas medições em MQ.

2.10 $f : D \longrightarrow C$ é dita **bijetora** se for injetora e sobrejetora.

2.10.1 Se $f : D \longrightarrow C$ é bijetora, então existe uma, e somente uma, função $f^{-1} : C \longrightarrow D$ tal que $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

2.10.2 f^{-1} é chamada **função inversa** de f . Uma função que tem inversa é dita **invertível**.

2.10.3 A inversa de uma função bijetora é bijetora e, além disso, $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.11 Se $f : D \longrightarrow C$ e $f_1 : D_1 \longrightarrow C$ são tais que $D_1 \subset D$ e $f_1(x) = f(x)$ para qualquer x em D_1 , dizemos que f_1 é **restrição** de f , do domínio D para o D_1 , e denotamos a restrição pelo símbolo $f|_{D_1}$.

2.11.1 Se f_1 é restrição de f , dizemos que f é uma **extensão** de f_1 , do domínio D_1 para o D .

2.12 Se $f : D \longrightarrow C$ e $f_1 : D_1 \longrightarrow C_1$ são tais que $D_1 \subset D$, $C_1 \subset C$ e $f_1(x) = f(x)$ para qualquer x em D_1 , dizemos que f_1 é uma **abreviação** de f , do domínio D para o D_1 e do contradomínio C para o C_1 ; denotamos a abreviação pelo símbolo $f|(D_1, C_1)$.

NB: Em qualquer abreviação é necessário que $f(D_1) \subset C_1$.

2.12.1 Se f_1 é abreviação de f , podemos dizer que f é uma **ampliação** de f_1 , do domínio D_1 para o D e do contradomínio C_1 para o C .

2.12.2 A abreviação $f|(D, f(D)) : D \longrightarrow f(D)$ de qualquer função $f : D \longrightarrow C$ é uma função sobrejetora.

2.13 Sejam $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ e $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$. Se $Y_1 \subset X_2$, definimos **função composta** de f_2 e f_1 como sendo a função $f_2 \circ f_1 : X_1 \longrightarrow Y_2 : x \longmapsto f_2(f_1(x))$.

2.13.1 Dadas as funções f , g e h , se as funções compostas $f \circ g$, $(f \circ g) \circ h$, $g \circ h$ e $f \circ (g \circ h)$ existirem, então $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2.14 Função **identidade** em um conjunto X é a função $\text{id}_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$.

2.14.1 Função **inclusão** de um subconjunto A de X no conjunto X é a função $i_A : A \longrightarrow X : x \longmapsto x$.

2.14.2 i_A injeta A em X e $\text{id}_X|A = i_A$.

2.15 (i) para qualquer $f : X \longrightarrow Y$, $\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X$;
(ii) se $f : X \longrightarrow Y$ é bijetora, $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ e $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$.

2.15.1 Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$; então: $g = f^{-1}$ se, e somente se, $g \circ f = \text{id}_X$ e $f \circ g = \text{id}_Y$.

2.15.2 Sejam $g : X \longrightarrow Y$ e $f : Y \longrightarrow Z$; se existem f^{-1} e g^{-1} , então, também existe $(f \circ g)^{-1}$ e $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

3. Indexações

3.1 Se f é uma função de X em Y , dizemos que o conjunto imagem $f(X)$ é **indexado** pelos elementos de X por meio da função f .

3.1.1 Dizemos que: f é uma **indexação** de $f(X)$; X é o conjunto **indexador** do conjunto $f(X)$ por meio da função f ; x é o índice do elemento y se $y = f(x)$ e escrevemos f_x , ou f^x no lugar de $f(x)$.

3.1.2 Dizemos que um conjunto S é indexado pela função f se $S = f(X)$, e escrevemos $S = \{f_x \mid x \in X\}$.

3.2 Seqüência é uma função com imagem indexada por algum subconjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$.

3.2.1 Se $\mathcal{Z}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, uma função sobrejetora $a : \mathcal{Z}_n \longrightarrow A$ é uma seqüência e A é indexado por $\mathcal{Z}_n$: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

3.2.2 Se $\mathbb{Z}_>$ é o conjunto dos inteiros positivos, uma função sobrejetora $b : \mathbb{Z}_> \longrightarrow B$ é uma seqüência e B é indexado por $\mathbb{Z}_>$: $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}_>\} = \{b_1, b_2, \dots\}$.

3.2.3 Progressões aritmética e geométrica são exemplos de seqüências, indexadas por $\mathcal{Z}_n$, ou por $\mathbb{Z}_>$, ou por $\mathbb{N}$.

3.2.4 Matrizes são funções com domínio $\mathcal{Z}_m \times \mathcal{Z}_n$.

NB: Em Mecânica Analítica, um sistema com espaço de configurações de dimensão n tem suas coordenadas generalizadas indexadas por $q : \mathcal{Z}_n \longrightarrow \mathbb{R} : i \mapsto q_i$. Uma corda ideal tensa, de extremidades fixas e comprimento natural a , que na situação de equilíbrio se encontra no intervalo $[0; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq a\}$ de um eixo coordenado $\mathcal{OX}$, tem seus deslocamentos transversos indexados por $u : [0; a] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto u_x$. Os estados de um campo no espaço físico, tal como o campo eletromagnético, são descritos por funções do tipo $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x})$; é instrutivo encará-las como funções indexadoras e escrever $\phi_{\mathbf{x}} := \phi(\mathbf{x})$.

3.3 Se a e b são elementos de um conjunto A , a seqüência de domínio $\mathcal{Z}_2$ definida por $: \mathcal{Z}_2 \longrightarrow A : 1 \mapsto a : 2 \mapsto b$ tem gráfico $\{(1, a), (2, b)\}$, que denotamos por $((a, b))$.

3.3.1 Sejam dois gráficos de seqüências de domínio $\mathcal{Z}_2$, $((a, b)) := \{(1, a), (2, b)\}$ e $((x, y)) := \{(1, x), (2, y)\}$. Vale a propriedade

$$((a, b)) = ((x, y)) \Leftrightarrow a = x \text{ e } b = y . \quad (38)$$

a ser comparada com (22).

3.3.2 Por abuso de linguagem, chamamos também $((a, b))$ de par ordenado e usamos também para ele o símbolo (a, b) .

3.4 Seja um conjunto não-vazio A . O gráfico da sequência $: \mathcal{Z}_n \longrightarrow A: i \mapsto a_i$ é chamado **n -upla ordenada** de elementos de A e denotado por $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

3.4.1 Para quaisquer n -uplas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \iff a_1 = x_1, a_2 = x_2, \dots, a_n = x_n. \quad (39)$$

3.5 Produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ($(n \in \mathbb{Z}_{>})$) dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é o conjunto de todas as n -uplas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, tais que $a_i \in A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}. \quad (40)$$

3.5.1 Se $A_i = A$ ($i = 1, 2, \dots, n$), escrevemos $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$.

3.6 Uma **família** de conjuntos é um conjunto de conjuntos. Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos indexada pelo conjunto $\mathcal{A}$ por meio da função sobrejetora $A, \mathcal{F} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.

3.7 Seja uma família $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ de subconjuntos de um conjunto Γ .

3.7.1 União dos conjuntos da família é o conjunto $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ dos elementos de Γ que pertencem a pelo menos um dos conjuntos da família,

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \iff x \in A_\alpha \text{ para algum } \alpha \in \mathcal{A}. \quad (41)$$

3.7.2 Interseção dos conjuntos da família é o conjunto $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ dos elementos de Γ que pertencem a todos os conjuntos da família,

$$x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \Leftrightarrow x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}. \quad (42)$$

3.7.3 Produto Cartesiano dos conjuntos de uma família $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ é o conjunto $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ dos gráficos de todas as funções

$$p : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \quad | \quad p(\alpha) \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}. \quad (43)$$

3.7.4 Para famílias que tem um número finito de conjuntos, essas definições de união, interseção e produto cartesiano se reduzem às prévias.

3.8 Axioma da Escolha. Se $A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, então $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \neq \emptyset$.

3.9 Partição de um conjunto A é uma família de subconjuntos de A , disjuntos e não-vazios, cuja união é A .

4. Relações de equivalência

4.1 Uma relação $\mathcal{R}$ em um conjunto não-vazio A é dita uma **relação de equivalência** em A se, para quaisquer elementos x, y e z em A , valem as propriedades ditas **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**, respectivamente,

$$\sim 1) x\mathcal{R}x, \quad (44)$$

$$\sim 2) x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x, \quad (45)$$

$$\sim 3) x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z. \quad (46)$$

4.1.1 Se $x\mathcal{R}y$, escrevemos $x \sim_{\mathcal{R}} y$ e dizemos que x é $\mathcal{R}$ -equivalente a y ou, resumidamente, escrevemos $x \sim y$ e dizemos que x é equivalente a y . Também é comum escrever $x = y \pmod{\mathcal{R}}$, que se lê: x é igual a y módulo $\mathcal{R}$.

4.1.2 Um exemplo familiar de relação de equivalência é a de semelhança de frações, a relação **sem** definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $(m, n) \text{ sem } (p, q) \iff m q = n p$ (para quaisquer (m, n) e (p, q) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$).

4.2 **Classe de $\mathcal{R}$ -equivalência** em A gerada por $a \in A$ é, por definição, o subconjunto $(a]_{\mathcal{R}}$ dos elementos de A que são $\mathcal{R}$ -equivalentes a a ,

$$(a]_{\mathcal{R}} := \{x \in A \mid x\mathcal{R}a\}. \quad (47)$$

Escrevemos abreviadamente $(a]$ no lugar de $(a]_{\mathcal{R}}$.

4.2.1 Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em um conjunto A não-vazio. Então,

- (i) cada elemento de A pertence à classe que gera;
- (ii) nenhuma das classes de equivalência é vazia;
- (iii) a união de todas elas é o próprio conjunto A ;
- (iv) cada elemento de A gera somente uma classe de equivalência;
- (v) se um elemento de A pertence a uma classe de equivalência, ele gera essa classe;
- (vi) dois elementos de A geram a mesma classe de equivalência se, e somente se, ambos pertencem a essa classe, isto é, se são equivalentes;
- (vii) classes de equivalência distintas são disjuntas.

4.2.2 Qualquer elemento de uma classe de equivalência determina univocamente a classe e é chamado um **representativo** da classe.

4.3 O conjunto de todas as classes de $\mathcal{R}$ -equivalência de A é chamado **quociente** do conjunto A pela relação $\mathcal{R}$ e é denotado por $A/\mathcal{R}$.

4.3.1 No exemplo dado em **4.1.2**, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\text{sem} = \mathbb{Q}$, que é um resultado bem conhecido da aritmética.

4.4 Projecção de A em $A/\mathcal{R}$ é a função sobrejetora

$$\pi : A \longrightarrow A/\mathcal{R} : x \longmapsto (x] . \quad (48)$$

4.4.1 Se x e y são diferentes em A , mas equivalentes, suas classes em $A/\mathcal{R}$ são iguais: $(x]_{\mathcal{R}} = (y]_{\mathcal{R}}$. Nesse sentido dizemos que fazer a projecção *i.e.*, tomar o quociente, **identifica** os elementos equivalentes e escrevemos $x = y$ no lugar de $(x]_{\mathcal{R}} = (y]_{\mathcal{R}}$.

4.4.2 Toda relação de equivalência em um conjunto gera nele uma partição constituída pelas suas classes de equivalência. Toda partição de um conjunto gera nele uma relação de equivalência que consiste nos elementos estarem em um mesmo subconjunto da partição.

5. Grupo

5.1 Grupo é um par $(G, \cdot)$ no qual G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação $: G \times G \longrightarrow G: (a, b) \mapsto a \cdot b$ que satisfaz às seguintes propriedades:

(G1) para quaisquer a, b e c em G ,

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) ;$$

(G2) existe em G um elemento e tal que, para cada a em G ,

$$a \cdot e = e \cdot a = a ;$$

(G3) para qualquer a em G existe em G um elemento a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e .$$

5.1.1 É comum chamar (i) a operação, **multiplicação**; (ii) o resultado, **produto**; (iii) os elementos operados, **fatores**; (iv) o conjunto G munido da operação, grupo; (v) apenas o conjunto G , por abuso de linguagem, grupo.

5.1.2 A propriedade (G1) é chamada **associatividade** da operação; ela permite escrever cada um de seus membros de sua igualdade na forma $a \cdot b \cdot c$.

5.1.3 Abreviamos produtos de um elemento $a \in G$ de acordo com :
 $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ com n fatores se $n \geq 2$; $a^n = a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}$ com $|n|$ fatores se $n \leq -2$; $a^n = a$ se $n = 1$; $a^n = e$ se $n = 0$. Obtemos

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{Z}) . \quad (49)$$

5.1.4 O elemento e com a propriedade (G2) é chamado **elemento neutro** da multiplicação ou **identidade** do grupo. Em um grupo há um único elemento neutro.

5.1.5 O elemento a^{-1} da propriedade (G3) é chamado **elemento inverso** de a . Cada elemento de um grupo possui um único inverso no grupo.

5.1.6 A notação mais comum para indicar a operação no grupo é a justaposição dos elementos: escrevemos ab , em vez de $a \cdot b$.

5.2 Um grupo G é dito **comutativo**, ou **abeliano**, se $a \cdot b = b \cdot a$ para quaisquer elementos a e b de G .

5.2.1 Se um grupo é comutativo, pode-se usar para ele a chamada **notação aditiva**, na qual a operação é representada por $+$ e chamada **adição**; seu resultado é chamado **soma**, e os elementos que são operados, **parcelas**.

Escreve-se: **(i)** $a + b$ para representar a operação de a com b ; **(ii)** $-a$ para representar o elemento inverso de a ; **(iii)** $b - a$ para representar a operação $b + (-a)$; **(iv)** na em vez de a^n . A notação aditiva jamais é usada se o grupo não é comutativo.

5.3 O conjunto dos números inteiros munido da operação usual de adição de inteiros é um grupo comutativo. O conjunto dos números inteiros munido da operação usual de multiplicação de inteiros não é um grupo.

NB: A estrutura de grupo é extremamente importante em Física. São exemplos notáveis de grupo na Física: os grupos constituídos por, respectivamente, rotações e translações; os grupos de Galileu, de Lorentz e de Poincaré; os grupos de simetrias dos cristais e os de simetrias das partículas elementares.

6. Anel e corpo

6.1 Anel é uma trinca $(A, +, \cdot)$, na qual A é um conjunto, e $+: A \times A \longrightarrow A$: $(a, b) \mapsto a + b$ e $\cdot : A \times A \longrightarrow A$: $(a, b) \mapsto a \cdot b$ são duas operações tais que,

(An1) para quaisquer a e b em A , $a + b = b + a$;

(An2) para quaisquer a, b e c em A , $(a + b) + c = a + (b + c)$;

(An3) existe em A um elemento 0 tal que $a + 0 = a$,

qualquer que seja o elemento a de A ;

(An4) para cada a em A existe em A um elemento $-a$ tal que $a + (-a) = 0$;

(An5) para quaisquer a, b e c em A , $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(An6) existe em A um elemento 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$,

qualquer que seja o elemento a de A ;

(An7) para quaisquer a, b e c em A ,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

6.1.1 (i) A operação $+$ é chamada **adição** no anel, os elementos operados são chamados **parcelas** e o resultado, **soma**. A operação $\cdot$ é chamada **multiplicação** no anel, os elementos operados são chamados **fatores** e o resultado, **produto**. **(ii)** Dizemos que o anel $(A, +, \cdot)$ é o conjunto A munido das operações $+$ e $\cdot$ ou, por abuso de linguagem, que é o conjunto A .

6.1.2 O elemento 0 da propriedade (An3) é chamado **elemento neutro da adição**, ou **zero** do anel e o elemento 1 da propriedade (An6), **elemento neutro da multiplicação**, ou **unidade** do anel. O elemento $-a$ em An4 é chamado **negativo** de a (ou inverso aditivo de a).

6.1.3 Definimos diferença entre os elementos a e b do anel, que denotamos por $a - b$, como sendo o resultado da adição de a com o negativo de b ,
$$a - b = a + (-b).$$

6.1.4 Em um anel A : **(i)** há um único elemento neutro da adição e um único elemento neutro da multiplicação; **(ii)** cada elemento tem um único elemento negativo; **(iii)** $0 \cdot a = 0$ e $(-1) \cdot a = -a$, para qualquer $a \in A$;
(iv) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, para quaisquer $a, b \in A$.

6.2 Um anel A é chamado **campo** se, para cada $a \in A$, $a \neq 0$, existir um elemento a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$; esse elemento a^{-1} é chamado **inverso** de a (ou inverso multiplicativo de a). Em um campo, cada elemento tem apenas um inverso multiplicativo.

6.3 Um anel A é dito **comutativo** se também a multiplicação é comutativa, isto é, se para quaisquer $a, b \in A$, $a \cdot b = b \cdot a$. O conjunto dos inteiros munido das operações usuais de adição e multiplicação de inteiros é um anel comutativo, mas não é um campo.

6.4 Corpo é um campo comutativo, isto é, um anel comutativo no qual cada elemento diferente de zero tem inverso multiplicativo. Explicitamente: corpo é uma trinca $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ na qual $\mathbb{K}$ é um conjunto e $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ e $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ são duas operações que satisfazem às propriedades:

- (K1) para quaisquer α e β em $\mathbb{K}$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (K2) para quaisquer α, β e γ em $\mathbb{K}$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (K3) existe em $\mathbb{K}$ um elemento 0 tal que $\alpha + 0 = \alpha$, para qualquer α em $\mathbb{K}$;
- (K4) para cada α em $\mathbb{K}$ existe em $\mathbb{K}$ um elemento $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$;
- (K5) para quaisquer α e β em $\mathbb{K}$, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
- (K6) para quaisquer α, β e γ em $\mathbb{K}$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;
- (K7) existe em $\mathbb{K}$ um elemento 1 tal que $1 \cdot \alpha = \alpha$, para qualquer α em $\mathbb{K}$;
- (K8) para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, existe α^{-1} em $\mathbb{K}$ tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$;
- (K9) para quaisquer α, β e γ em $\mathbb{K}$, $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

6.4.1 (i) Em geral, os elementos de um corpo são chamados **números**. **(ii)** Em um corpo, usamos a notação $a/b := a \cdot b^{-1}$. **(iii)** Por abuso de linguagem, referimo-nos ao conjunto $\mathbb{K}$ como sendo o corpo.

6.4.2 Os exemplos mais comuns de corpo são os números racionais $\mathbb{Q}$, os números reais $\mathbb{R}$ e os números complexos $\mathbb{C}$.

NB: (i) Há conjuntos de operadores em MQ que têm a estrutura de anéis não comutativos. (ii) De um modo geral, consideramos em física que os resultados de medidas são números reais, *i.e.*, elementos do corpo $\mathbb{R}$. (iii) Os números complexos são essenciais na formulação usual da MQ. (iv) Em cálculos na TQC é comum estender o tempo de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$.

7. Espaço vetorial

7.1 Um **espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$** é uma quadra $(V, (\mathbb{K}, +, \cdot), \oplus, \odot)$ na qual V é um conjunto, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo, ao passo que $\oplus : V \times V \rightarrow V$ e $\odot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ são duas operações que satisfazem às propriedades:

- (V1) para quaisquer x e y em V , $x \oplus y = y \oplus x$
- (V2) para quaisquer x, y e z em V , $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
- (V3) existe em V um elemento θ tal que, para todo x em V , $x \oplus \theta = x$;
- (V4) para cada x em V existe em V um elemento $-x$ tal que $x \oplus (-x) = \theta$;
- (V5) se 1 é a unidade em $\mathbb{K}$, para qualquer $x \in V$, $1 \odot x = x$;
- (V6) para quaisquer α e β em $\mathbb{K}$ e x em V , $\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x$;
- (V7) para quaisquer α e β em $\mathbb{K}$ e x em V , $(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$;
- (V8) para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x, y \in V$, $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

7.1.1 Os elementos de V são chamados **vetores** e os elementos de $\mathbb{K}$, **escalares** ou números. A operação $\oplus$ é chamada **adição vetorial**, seu resultado, **soma vetorial** e os vetores somados, **componentes vetoriais** da soma. A operação $\odot$ é chamada **multiplicação de um escalar por um vetor** e seu resultado, **produto** do escalar pelo vetor em questão.

7.1.2 Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, (\mathbb{K}, +, \cdot), \oplus, \odot)$ é **espaço vetorial real**, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que é **espaço vetorial complexo**.

7.1.3 (i) Um espaço vetorial nunca é um conjunto vazio, pois sua definição exige que haja nele pelo menos um elemento, o θ da propriedade (V3). **(ii)** (V1)-(V4) mostram que $(V, \oplus)$ é um grupo comutativo.

7.1.4 Por abuso de linguagem, substituímos a expressão “ $(V, (\mathbb{K}, +, \cdot), \oplus, \odot)$ é espaço vetorial” por “ $(V, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ é espaço vetorial”, ou por “ V munido das operações $\oplus$ e $\odot$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ”, ou mesmo chamamos o conjunto V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

7.1.5 (i) (V1) é chamada **propriedade comutativa** da adição vetorial. **(ii)** (V2) é chamada **propriedade associativa** da adição vetorial; ela nos dispensa do uso de parênteses para indicar somas de mais de dois vetores. **(iii)** O elemento θ em (V3) é chamado **vetor nulo** e o elemento $-x$ em (V4) é chamado **vetor oposto** a x .

7.1.6 De (V1) e (V3), obtemos $\theta \oplus x = x$, para todo $x \in V$, e de (V1) e V4) obtemos $-x \oplus x = \theta$, para todo $x \in V$.

7.1.7 (i) (V6) é uma espécie de associatividade. **(ii)** (V7) é chamada propriedade **distributiva** da multiplicação de escalar por vetor em relação à adição de escalares. (V8) é chamada propriedade distributiva da multiplicação de escalar por vetor em relação à adição de vetores.

7.1.8 (i) Há apenas um vetor nulo e cada vetor tem apenas um oposto; (ii) $\forall x \in V : 0 \cdot x = 0$; (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot 0 = 0$; (iv) $\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ou $x = 0$; (v) (i) $(-1) \cdot x = -x$; (vi) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$; (vii) $(-\alpha) \cdot (-x) = \alpha \cdot x$.

7.1.9 Notação simplificada: (i) a adição de vetores é indicada pelo mesmo símbolo $+$ que indica a adição de escalares; (ii) tanto a multiplicação de escalares quanto a multiplicação de escalares por vetores serão indicadas pela mera justaposição das letras que representam os elementos que participam da operação, *i.e.*, $\alpha\beta := \alpha \cdot \beta$ para α e β em $\mathbb{K}$ e $\alpha x := \alpha \cdot x$ para α em $\mathbb{K}$ e x em V ; (iii) o vetor nulo pode ser representado pelo mesmo símbolo 0 que representa o zero do corpo; (iv) $x\alpha := \alpha x$.

7.1.10 Definimos diferença $x - y$ entre vetores x e y como a adição de x com o oposto de y , $x - y := x + (-y)$.

7.1.11 Para identificar um vetor usamos uma letra, digamos a , e a declaração de que se trata de um elemento do espaço vetorial, digamos V , $a \in V$. Também identificamos um vetor usando uma letra dentro de uma simbologia especial, por exemplo: $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\underline{a}$, $|a\rangle$.

NB: A estrutura de espaço vetorial tem incontáveis aplicações em física. Para citar apenas dois exemplos, espaços vetoriais reais são usados para descrever a geometria do espaço-tempo da MC newtoniana e da Relatividade Restrita e espaços vetoriais complexos são usados para descrever estados dos sistemas na MQ.

7.2 Seja $\mathcal{E}$ o espaço da geometria euclidiana clássica. Dois pontos distintos $A, B \in \mathcal{E}$ determinam um segmento de reta orientado, ou **seta**, $\overrightarrow{AB}$.

7.2.1 Comprimento $\|\overrightarrow{AB}\|$ de uma seta $\overrightarrow{AB}$ é a distância entre A e B ; **direção** da seta é a da reta que passa por A e B e **sentido** da seta é de A para B . **Ponto inicial** da seta é o ponto A e **ponto final** é o B . A reta que contém a seta é chamada sua **reta suporte**.

7.2.2 Um único ponto A define uma **seta nula**, $\overrightarrow{AA}$. Dizemos que: seu ponto final coincide com o inicial; seu comprimento é zero e sua direção e sentido são indeterminados.

7.2.3 Seja $T_P(\mathcal{E})$ o conjunto de todas as setas que emanam do ponto P de $\mathcal{E}$. Definimos **adição de setas**

$$: T_P(\mathcal{E}) \times T_P(\mathcal{E}) \rightarrow T_P(\mathcal{E}) : (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) \mapsto \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$$

pela regra usual do paralelogramo.

7.2.4 Definimos **multiplicação de um número real por uma seta**

$$: \mathbb{R} \times T_P(\mathcal{E}) \rightarrow T_P(\mathcal{E}) : (\lambda, \overrightarrow{PA}) \mapsto \lambda \overrightarrow{PA}$$

pela regra usual de escalonar a seta pelo número.

7.2.5 $T_P(\mathcal{E})$ munido dessas operações é espaço vetorial real. $\overrightarrow{PP}$ é o vetor nulo desse espaço e a seta oposta de $\overrightarrow{PA}$ é a seta de $T_P(\mathcal{E})$ com mesmo módulo e direção de $\overrightarrow{PA}$, mas de sentido oposto.

7.3 Seja um conjunto $S \neq \emptyset$ e $\mathbb{K}$ um corpo.

7.3.1 Definimos **adição de funções de $\mathbb{K}^S$** como,

$$: \mathbb{K}^S \times \mathbb{K}^S \rightarrow \mathbb{K}^S : (f, g) \mapsto f + g ,$$

onde $(f + g)(s) = f(s) + g(s) \ (\forall s \in S)$.

7.3.2 Definimos **multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por uma função de $\mathbb{K}^S$** como,

$$: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^S \rightarrow \mathbb{K}^S : (\lambda, f) \mapsto \lambda f ,$$

onde $(\lambda f)(s) = \lambda f(s) \ (\forall s \in S)$.

7.3.3 $\mathbb{K}^S$ munido dessas operações é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. O vetor nulo de $\mathbb{K}^S$ é a função $\mathcal{O}$ definida por $\mathcal{O}(s) = 0 \ (\forall s \in S)$ e a função oposta a f é a função $-f$ definida por $(-f)(s) = -[f(s)] \ (\forall s \in S)$.

7.4 Seja $\text{Pol}_{\mathbb{K}}$ o conjunto de todos os polinômios em $\mathbb{K}$; obviamente $\text{Pol}_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ e $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ é um caso particular de $\mathbb{K}^S$ no exemplo anterior.

7.4.1 Definimos **adição de polinômios e multiplicação de elemento de $\mathbb{K}$ por polinômio** do mesmo modo que no exemplo anterior.

7.4.2 $\text{Pol}_{\mathbb{K}}$ munido dessas operações é um espaço vetorial.

7.5 Seja $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n , juntamente com o polinômio nulo.

7.5.1 $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n$ munido das operações do exemplo anterior é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

7.6 Seja $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{Z}_{>}$) o conjunto de todas as n -uplas de elementos de $\mathbb{K}$. Obviamente $\mathbb{K}^n$ é o caso particular de $\mathbb{K}^S$ para $S = \mathcal{Z}_n = \{1, \dots, n\}$.

7.6.1 Definimos **adição de n -uplas em $\mathbb{K}^S$** como,
 $:\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n : (a, b) \mapsto a + b$, onde $(a + b)_i = a_i + b_i$ ($i = 1, \dots, n$).

7.6.2 Definimos **multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por n -upla de $\mathbb{K}^n$** como, $:\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$, onde $(\lambda x)_i := \lambda x_i$ ($i = 1, \dots, n$).

7.6.3 $\mathbb{K}^n$ munido dessas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

7.7 Um corpo $\mathbb{K}$ munido de suas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

7.7.1 $\mathbb{C}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

7.8 Seja $\mathcal{E}$ o espaço da geometria euclidiana clássica, como no exemplo **3.2**. Seja $\overrightarrow{\mathcal{E} \times \mathcal{E}}$ o conjunto de todas as setas de $\mathcal{E}$.

7.8.1 Uma seta $\overrightarrow{AB}$ é dita **equipolente** a uma seta $\overrightarrow{A'B'}$ se $\overrightarrow{AB}$ tiver o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido que $\overrightarrow{A'B'}$, e, nesse caso, escrevemos $\overrightarrow{AB} \text{ equip } \overrightarrow{A'B'}$.

7.8.2 A relação equip é de equivalência em $\overrightarrow{\mathcal{E} \times \mathcal{E}}$ e, portanto, particiona $\overrightarrow{\mathcal{E} \times \mathcal{E}}$ em classes de equivalência. Representamos por $\overrightarrow{S}(\mathcal{E})$ o conjunto $\overrightarrow{\mathcal{E} \times \mathcal{E}}/\text{equip}$.

7.8.3 A classe de equivalência gerada por $\overrightarrow{AB}$ é chamada **seta livre** gerada por $\overrightarrow{AB}$ e representada por $(\overrightarrow{AB}]$.

7.8.4 Dadas duas setas livres $(\overrightarrow{AB}]$ e $(\overrightarrow{CD}]$, seja $\overrightarrow{A_1B_1}$ um elemento da primeira e $\overrightarrow{B_1D_1}$ o elemento da segunda cujo ponto inicial coincide com o ponto final do elemento $\overrightarrow{A_1B_1}$ da primeira. Existe um única seta $\overrightarrow{A_1D_1}$; ela determina uma única seta livre resultante $(\overrightarrow{A_1D_1}]$. Essa mesma seta livre seria obtida repetindo o procedimento a partir de qualquer outro elemento da primeira seta livre $(\overrightarrow{AB}]$. Fica definida a operação de **adição de setas livres**, $: \vec{S}(\mathcal{E}) \times \vec{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \vec{S}(\mathcal{E}) : ((\overrightarrow{AB}], (\overrightarrow{CD}]) \mapsto (\overrightarrow{AB}] + (\overrightarrow{CD}] = (\overrightarrow{A_1D_1}]$.

7.8.5 Dados um número real λ e uma seta livre $(\overrightarrow{AB}]$, seja $\lambda\overrightarrow{A_1B_1}$ um elemento da seta livre e $\lambda\overrightarrow{A_1B_1}$ a seta obtida pelo processo usual de escalonar elemento $\overrightarrow{A_1B_1}$ pelo número λ ; essa seta escalonada determina uma única seta livre $(\lambda\overrightarrow{A_1B_1}]$. Essa mesma seta livre seria obtida repetindo o procedimento a partir de qualquer outro elemento da seta livre $(\overrightarrow{AB}]$. Fica definida a operação de **multiplicação de número real por setas livres**, $: \mathbb{R} \times \vec{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \vec{S}(\mathcal{E}) : (\lambda, (\overrightarrow{AB}]) \mapsto \lambda(\overrightarrow{AB}] = (\lambda\overrightarrow{A_1B_1}]$.

7.8.6 O conjunto $\vec{S}(\mathcal{E})$ munido dessas operações é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais.

7.8.7 Por definição, comprimento, direção e sentido de uma seta livre são os respectivo comprimento, direção e sentido de um elemento da seta livre. É usual denotar uma seta livre por uma única letra com a setinha, $\vec{a} = (\overrightarrow{AB})$.

NB: (i) Em mecânica newtoniana, a soma de duas soluções da equação de movimento de um sistema não é, na maioria das vezes, uma solução. No problema de Kepler, *e.g.*, movimentos circulares uniformes são soluções da equação de movimento, enquanto que a superposição de dois deles em geral não é solução. Os antigos sistemas astronômicos ptolomaico e copernicano supunham que todos os movimentos planetários eram superposições de movimentos circulares. (ii) Em mecânica quântica, os estados de um sistema são descritos por funções de um conjunto $S \neq \emptyset$ em $\mathbb{C}$. O postulado fundamental da mecânica quântica afirma: se duas funções Ψ e Φ de $\mathbb{C}^S$ são estados de um sistema, então $\alpha\Psi + \beta\Phi$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ também o é. Os estados de um sistema em mecânica quântica formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ quando equipados com as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número por função.

8. Subspaços vetoriais e bases

8.1 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e A e B dois subconjuntos de V . Definimos **soma dos subconjuntos** A e B como sendo o seguinte subconjunto de V : $A + B := \{x \in V \mid x = a + b, a \in A \text{ e } b \in B\}$.

8.1.1 Se $a \in V$, $a + B := \{a\} + B$.

8.1.2 (i) $A + B = B + A$; (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$; (iii) $A + \{0\} = A$; (iv) $A + V = V$.

8.2 Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, uma **combinação linear** desses vetores é um vetor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são chamados **coeficientes da combinação linear**.

8.2.1 $\mathbb{K}\emptyset = \{0\}$.

8.2.2 Seja $A \neq \emptyset$ um subconjunto de V . **Varredura de A** é o conjunto $\mathbb{K}A$ de todas as combinações lineares de vetores de A . Se $B = \mathbb{K}A$, dizemos que A **varre** B .

8.2.3 Se $v \in V$, $\mathbb{K}v := \mathbb{K}\{v\}$.

8.2.4 $\mathbb{K}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2 + \dots + \mathbb{K}v_n$.

8.3 Um subconjunto W não vazio de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é dito um **subespaço vetorial de V** se, para quaisquer $x, y \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$ e (ii) $\alpha \in \mathbb{K}, x \in W \Rightarrow \alpha x \in W$.

8.3.1 Se $+: V \times V \rightarrow V$ e $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ sobre V são as operações no espaço vetorial V e W é subespaço vetorial de V , são possíveis as abreviações $+: W \times W \rightarrow W$ e $\cdot: \mathbb{K} \times W \rightarrow W$ sobre W , que chamamos de operações em W **induzidas** pelas operações em V .

8.3.2 Se V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V , então W munido das operações induzidas pelas operações de V é um espaço vetorial sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.

8.3.3 Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, $\{0\}$ e V são subespaços de V . Eles são chamados **subespaços triviais**; um subespaço de V diferente de V é dito um **subespaço próprio** de V .

8.3.4 Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dois vetores de $T_P(\mathcal{E})$, então $\mathbb{R}\vec{a}$ e $\mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}$ são subespaços de $T_P(\mathcal{E})$.

8.3.5 $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n$ é subespaço do espaço $\text{Pol}_{\mathbb{K}}$.

8.3.6 O conjunto das n -uplas de $\mathbb{K}$ nas quais o último elemento é zero é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

8.3.7 A intersecção de qualquer família de subespaços vetoriais de um espaço vetorial é subespaço do espaço vetorial.

8.3.8 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto de V . A varredura $\mathbb{K}S$ é um subespaço de V , contém S e está contido em cada subespaço de V que contenha S , *i.e.*, é o subespaço minimal da família dos subespaços de V que contém S . Além disso, S é a intersecção dessa família.

8.3.9 $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n$ é o subespaço de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ dado pela varredura $\mathbb{K}\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$, onde $f_j : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto x^j$ ($j \in \mathbb{Z}_{\geq}$).

8.3.10 $\text{Pol}_{\mathbb{K}}$ é o subespaço de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ dado pela varredura $\mathbb{K}\{f_j \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq}\}$.

8.3.11 Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V , então $W_1 + W_2$ é subespaço de V . $W_1 + W_2$ é chamado **soma dos subespaços** W_1 e W_2 .

8.3.12 A soma $W_1 + W_2$ de subespaços W_1 e W_2 é dita uma **soma direta** se qualquer $x \in W_1 + W_2$ puder ser escrito de uma única maneira como soma de um elemento de W_1 e um elemento de W_2 . Nesse caso escrevemos $W_1 + W_2 =: W_1 \oplus W_2$.

8.3.13 (i) $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

8.3.14 Os conceitos de soma e soma direta de subespaços pode ser estendido para mais de dois subespaços de modo natural.

8.4 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto S de V é dito **linearmente dependente**, ou LD, se existirem vetores distintos $x_1, \dots, x_n$ em S e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, não todos nulos, de tal modo que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Um conjunto que não é linearmente dependente é dito **linearmente independente**, ou LI.

8.4.1 Em $T_P(\mathcal{E})$ duas setas não-colineares são LI e três setas não-coplanares são LI.

8.4.2 Em $\text{Pol}_{\mathbb{C}}$ o conjunto de funções $\{f_j \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq}\}$ do exemplo **8.3.9** é LI.

8.4.3 Em $\mathbb{K}^n$ o conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$, no qual u_i é a n -upla na qual todos os elementos são zero com exceção do i -ésimo ($i = 1, \dots, n$), é LI.

8.4.4 $\emptyset$ é LI.

8.4.5 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $Y_{n+1} = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ um conjunto de $n+1$ vetores de V . Se cada elemento de Y_{n+1} é combinação linear de n vetores $x_1, \dots, x_n$ de V então Y_{n+1} é linearmente dependente.

8.5 Um subconjunto de um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é dito uma **base de Hamel** do espaço, ou simplesmente uma **base** do espaço, se é um subconjunto que varre o espaço e é linearmente independente.

8.5.1 Todo espaço vetorial V tem uma base de Hamel (como consequência do lema de Zorn).

8.5.2 Todas as bases de um espaço vetorial têm a mesma cardinalidade.

8.5.3 Dimensão de um espaço vetorial é a cardinalidade de uma de suas bases; a dimensão de V sobre $\mathbb{K}$ é denotada por $\dim_{\mathbb{K}} V$.

8.5.4 Se um espaço é de dimensão finita, a dimensão é o número máximo de vetores LI nesse espaço.

8.5.5 Se $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ é base de V , para cada $x \in V$ há uma, e somente uma n -upla $(x^1, \dots, x^n)$, tal que $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Os elementos da n -upla são chamados **componentes** de x na base $\mathcal{B}$; x^i é dito **componente de x ao longo de e_i** ($i = 1, \dots, n$).

8.5.6 A função $\epsilon_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ é uma bijeção.

8.5.7 Em $T_P(\mathcal{E})$ qualquer conjunto de três vetores não coplanares é uma base; $\dim_{\mathbb{R}} T_P(\mathcal{E}) = 3$.

8.5.8 Em $\text{Pol}_{\mathbb{C}}^n$ o conjunto $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ de **3.3.9** é base; $\dim_{\mathbb{C}} \text{Pol}_{\mathbb{C}}^n = n + 1$.

8.5.9 Em $\text{Pol}_{\mathbb{C}}$ o conjunto $\{f_j \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq}\}$ de **3.3.9** é base; $\text{Pol}_{\mathbb{C}}$ tem dimensão infinita.

8.5.10 $\{u_1, \dots, u_n\}$ do exemplo **3.4.3** é base de $\mathbb{K}^n$; $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

8.5.11 O espaço vetorial $\{0\}$ tem por base $\emptyset$; $\dim_{\mathbb{K}} \{0\} = 0$.

9 . Transformações lineares

9.1 Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$.

$T : V \rightarrow W$ é dita uma **transformação linear** de V em W se, para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(\alpha x) = \alpha T(x) .$$

9.1.1 Denotamos por $L_{\mathbb{K}}(V, W)$ o conjunto de todas as transformações lineares de V em W . Transformações lineares de V em W também são chamadas **homomorfismos** de V em W e escrevemos $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) := L_{\mathbb{K}}(V, W)$.

9.1.2 Uma transformação linear de V em V é dita um **operador linear** sobre V , ou **endomorfismo** de V ; escrevemos $\text{End}_{\mathbb{K}}(V) := L_{\mathbb{K}}(V, V)$.

9.1.3 Seja $\sigma : S \rightarrow S$ bijetora e $\sigma^* : \mathbb{K}^S \rightarrow \mathbb{K}^S : f \mapsto f \circ \sigma$; $\sigma^* \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^S)$.

9.1.4 Rotações de vetores de $T_P(\mathcal{E})$ em torno de um vetor unitário de $T_P(\mathcal{E})$ são operadores lineares sobre $T_P(\mathcal{E})$.

9.1.5 Seja um ponto fixo de um corpo rígido em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$ e seja $\vec{L}$ o momento angular relativo ao ponto fixo ($\vec{\omega}, \vec{L} \in \vec{S}(\mathcal{E})$). A função $I_Q : \vec{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \vec{S}(\mathcal{E}) : \vec{\omega} \mapsto \vec{L}$ é um operador linear sobre $\vec{S}(\mathcal{E})$ chamado de **operador de inércia**.

9.1.6 $\text{id}_V \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

NB: Os estados de um sistema quântico são elementos de um espaço vetorial $\mathfrak{h}$ sobre $\mathbb{C}$. Se nenhuma medição é realizada do instante t_0 ao instante t , então o estado do sistema no instante t , $\Psi(t)$, é dado em função do seu estado no instante t_0 , $\Psi(t_0)$, por $\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$, onde $U(t, t_0) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$.

9.2 Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e W um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ é uma base ordenada de V e $w_1, \dots, w_n$ são vetores quaisquer de W , então existe uma única extensão linear de V em W da função $:\mathcal{B} \rightarrow W : e_i \mapsto w_i$.

9.3 $T \in L_{\mathbb{K}}(V, W)$ é injetora se, e somente se, $T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. T de V em W é dita **singular** se existir $x \neq 0$ em V tal que $T(x) = 0$.

9.3.1 $\text{nul}(T) := \{x \in V \mid T(x) = 0\}$ é subespaço de V chamado **espaço nulo de T** . $T \in L_{\mathbb{K}}(V, W)$ é injetora se, e somente se, $\text{nul}(T) := \{0\}$.

9.4 Por definição, $T \in L_{\mathbb{K}}(V, W)$ é sobrejetora se $\text{im}(T) = W$. O conjunto $\text{im}(T)$ é subespaço de W .

9.5 Por definição, $\text{posto}(T) = \dim_{\mathbb{K}} \text{im}(T)$ e $\text{nulidade}(T) = \dim_{\mathbb{K}} \text{nul}(T)$.

9.6 Seja $T \in L_{\mathbb{K}}(V, W)$. Se V é de dimensão finita, então

$$\text{posto}(T) + \text{nulidade}(T) = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

9.7 Se $T \in L_{\mathbb{K}}(V, W)$ é bijetora, então $T^{-1} \in L_{\mathbb{K}}(W, V)$.

9.8 Uma transformação linear, *i.e.*, um homomorfismo V em W , é chamado **isomorfismo** de V em W se é invertível. Denotamos por $\text{Iso}_{\mathbb{K}}(V, W)$ o conjunto dos isomorfismos de V em W .

9.8.1 Se $f \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(V, W)$, então, para quaisquer $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $x + y = f^{-1}(f(x) + f(y))$ e $\lambda x = f^{-1}(\lambda f(x))$.

9.8.2 Um isomorfismo de V em V é chamado de **automorfismo** em V . Denotamos por $\text{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ o conjunto dos automorfismos em V .

9.8.3 A relação de isomorfismo entre espaços vetoriais é de equivalência.

9.8.4 Se existe um isomorfismo de V em W dizemos que V é **isomorfo** a W , ou que V e W são **isomorfos**, e escrevemos $V \simeq W$.

9.8.5 Espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão.

9.8.6 A função $\epsilon_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ em **3.5.6** é um isomorfismo de V em $\mathbb{K}^n$.

9.8.7 O isomorfismo anterior depende da escolha de uma base. Dizemos, informalmente, que isomorfismos que não dependem de escolhas são **isomorfismos naturais**. Se há um isomorfismo natural entre dois espaços vetoriais eles são ditos **naturalmente isomorfos**.

9.8.8 (i) $\text{Pol}_{\mathbb{K}}^n$ e $\mathbb{K}^{n+1}$ são naturalmente isomorfos;

(ii) $\vec{S}(\mathcal{E})$ e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos;

(iii) $\vec{S}(\mathcal{E})$ e $T_P(\mathcal{E})$ são naturalmente isomorfos.

9.9 $L_{\mathbb{K}}(V, W)$ munido das operações de **adição de transformações**

lineares, $: L_{\mathbb{K}}(V, W) \times L_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow L_{\mathbb{K}}(V, W) : (A, B) \mapsto A + B$, onde

$(A + B)(x) := A(x) + B(x) \ (\forall x \in V)$, e **multiplicação de número por**

transformação linear, $: \mathbb{K} \times L_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow L_{\mathbb{K}}(V, W) : (\alpha, A) \mapsto \alpha A$, onde

$(\alpha A)(x) := \alpha A(x) \ (\forall x \in V)$, é espaço vetorial.

9.9.1 Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de V e $\{u_1, \dots, u_m\}$ base de W , o conjunto $\{E_p^q \mid p = 1, \dots, m \text{ e } q = 1, \dots, n\}$ das extensões lineares de $E_p^q(e_i) = \delta_i^q u_p$ ($i = 1, \dots, n$) ($p = 1, \dots, m; q = 1, \dots, n$) é base de $L_{\mathbb{K}}(V, W)$.

9.9.2 Se $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$ e $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, então $\dim_{\mathbb{K}}(L_{\mathbb{K}}(V, W)) = mn$.

9.10 A **adição de endomorfismos** está definida em **5.9** pelo caso particular em que $V = W$. Definimos **multiplicação de endomorfismos** como sendo a sua composição, $: \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \times \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V) : (A, B) \mapsto AB = A \circ B$.

9.10.1 O conjunto $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ munido dessas operações é um anel.

9.10.2 Esse anel também é chamado **anel dos operadores** sobre o espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$.

9.11 Seja a multiplicação de endomorfismos pode ser restrita aos endomorfismos inversíveis. $\text{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ munido dessa operação é um grupo.

9.11.1 Esse grupo também é chamado **grupo linear geral sobre o espaço vetorial** V sobre $\mathbb{K}$ e é representado por $GL(V, \mathbb{K})$.

9.12 Uma **álgebra sobre um corpo** $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ munido de uma operação $: V \times V \longrightarrow V : (x, y) \mapsto xy$ que satisfaz às propriedades:

$$(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y \quad , \quad (\alpha x)y = \alpha(xy) \quad ,$$

e

$$x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 \quad , \quad x(\alpha y) = \alpha(xy) \quad ,$$

onde $x_1, x_2, y, x, y_1, y_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

9.12.1 A operação é chamada de multiplicação da álgebra e as propriedades, bilinearidade da multiplicação. Assim, podemos definir álgebra como um espaço vetorial munido de uma multiplicação bilinear.

9.12.2 Se a multiplicação da álgebra satisfaz, para quaisquer $x, y, z \in V$,

$$(xy)z = x(yz) ,$$

a álgebra é dita **associativa**.

9.12.3 Se a multiplicação satisfaz, para quaisquer $x, y, z \in V$,

$$xy = -yx \quad \text{e} \quad (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 ,$$

a álgebra é dita **de Lie**.

9.12.4 Se existe na álgebra um elemento e tal que, para qualquer $x \in V$,

$$xe = ex = x ,$$

o elemento e é chamado **identidade da álgebra** ou de **unidade da álgebra**. Nesse caso a álgebra é dita uma **álgebra com identidade** ou uma **álgebra unital**.

9.12.5 O espaço vetorial $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ munido da operação de multiplicação de endomorfismos é uma álgebra associativa com identidade. Portanto, nessa álgebra valem as regras

$$(i) (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B ,$$

$$(ii) (\alpha A)B = \alpha(AB) ,$$

$$(iii) A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 ,$$

$$(iv) A(\alpha B) = \alpha(AB) ,$$

$$(v) (AB)C = A(BC) ,$$

$$(vi) A \text{id}_V = \text{id}_V A = A ,$$

onde $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}(V)$.

9.12.6 Usando essa álgebra associativa, definimos a operação $: \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \times \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V) : (A, B) \mapsto [A, B] = AB - BA$; ela é chamada **comutação de operadores**, e seu resultado, **comutador dos operadores** em questão. $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ munido da comutação de operadores é uma álgebra de Lie.

9.13 As transformações lineares de um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$, no espaço vetorial $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{K}$, formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ que chamamos **espaço dual** de V e denotamos por V^* ,

$$V^* := L_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}). \quad (50)$$

9.13.1 Se V^* é espaço dual de V , dizemos que V é **espaço primal** de V^* .

9.13.2 Funções de um espaço vetorial sobre o seu corpo são chamadas **funcionais**, ou **formas**, sobre o espaço vetorial; os elementos de V^* são funcionais lineares sobre V .

9.13.3 Se $v \in V$, e $\varphi \in V^*$, $\varphi(v) \in \mathbb{K}$; na notação de Dirac, $|x\rangle \in V$, $\langle\phi| \in V^*$ e $\langle\phi|x\rangle \in \mathbb{K}$.

9.13.4 Se V é de dimensão finita, $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V^*$ e, portanto, V^* e V^* são isomorfos.

9.13.5 A projeção $\text{proj}_{\vec{n}} : T_P \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : \vec{a} \mapsto \|\vec{a}\| \cos(\hat{n}, \vec{a})$, ao longo de um unitário $\vec{n}$ em $T_P(\mathcal{E})$, é um funcional linear sobre $T_P(\mathcal{E})$, $\text{proj}_{\vec{n}} \in T_P(\mathcal{E})^*$.

9.13.6 Seja $S \neq \emptyset$ e $s_0 \in S$. $\Delta_{s_0} : \mathbb{K}^S \rightarrow \mathbb{K} : f \mapsto f(s_0)$, é um funcional linear sobre $\mathbb{K}^S$, $\Delta_{s_0} \in (\mathbb{K}^S)^*$. É chamado **funcional de Dirac** centrado em s_0 .

10. Espaço topológico

10.1 Topologia em um conjunto X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X , tal que

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(T2) qualquer união de elementos de $\mathcal{T}$ é elemento de $\mathcal{T}$;

(T3) qualquer interseção de um número finito de elementos de $\mathcal{T}$ é elemento de $\mathcal{T}$;

10.1.1 (i) $(X, \mathcal{T})$ (e por abuso de linguagem, X) é chamado **espaço topológico**;

(ii) Os elementos de X são chamados **pontos** e os de $\mathcal{T}$, **conjuntos abertos**.

10.1.2 $V \subset X$ é chamado **vizinhança** de $x \in X$ se existe um aberto U tal que $x \in U \subset V$; uma **vizinhança aberta** de x é, simplesmente, qualquer aberto que subentende x .

10.1.3 Se V é vizinhança de x dizemos que os pontos de V estão **V -adjacentes** a x ; Se V_1 e V_2 são vizinhanças de x , dizemos que os pontos de V_2 estão mais adjacentes a x que os de V_1 se V_2 está propriamente contido em V_1 .

- 10.1.4** (i) Se $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, $(X, \mathcal{T})$ é chamada **topologia trivial** de X .
(ii) Se $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, $(X, \mathcal{T})$ é chamada **topologia discreta** de X .
(iii) Se $X = \{a, b\}$ ($a \neq b$) e $\mathcal{T} = \{\emptyset, a, X\}$, $(X, \mathcal{T})$ é chamada **topologia de Sierpinski**.

10.1.5 Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são topologias de X , dizemos que $\mathcal{T}_1$ é **mais fina** que $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$; nesse caso dizemos que $\mathcal{T}_2$ é **mais grosseira** que $\mathcal{T}_1$. A topologia discreta é a mais fina das topologias e a trivial, a mais grosseira.

10.2 Um subconjunto $\mathcal{B}$ de uma topologia $\mathcal{T}$ é chamado **base** para a topologia se cada elemento da topologia é a união de elementos de $\mathcal{B}$; se $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{T}$; dizemos que $\mathcal{B}$ **gera** $\mathcal{T}$. Obviamente, $\mathcal{T}$ é base de $\mathcal{T}$.

- 10.2.1** (i) Um subconjunto de uma topologia é base da topologia se, e somente se, cada aberto da topologia tem cada um de seus pontos em algum aberto do subconjunto contido no aberto da topologia.
(ii) Se $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{T}$, então um subconjunto A de X é aberto se, e somente se, cada ponto de A pertence a algum subconjunto da base contido em A .

10.3 Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, $X_1 \subset X$ e $\mathcal{T}_{X_1}^X = \{U \cap X_1 | U \in \mathcal{T}\}$, então $(X_1, \mathcal{T}_{X_1}^X)$ é espaço topológico.

10.3.1 $\mathcal{T}_{X_1}^X$ é chamada **topologia induzida** por $\mathcal{T}$ em X_1 , ou **topologia de subespaço**; $(X_1, \mathcal{T}_{X_1}^X)$ é dito **subespaço topológico** de $(X, \mathcal{T})$.

10.4 Um subconjunto de X é dito **fechado** se seu complemento é um aberto da topologia de X .

10.4.1 Há subconjuntos que são abertos e fechados, como X e $\emptyset$, e conjuntos que não são nem abertos nem fechados.

10.5 Seja $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e S um subconjunto de X .

10.5.1 Ponto interior de S é um ponto que tem alguma vizinhança aberta contida em S .

10.5.2 Ponto exterior de S é qualquer ponto interior do complemento de S .

10.5.3 Ponto fronteiroço de S é um ponto cujas vizinhanças interceptam S e seu complemento.

10.5.4 Ponto aderente de S é um ponto cujas vizinhanças interceptam S .

10.5.5 Ponto de acumulação, ou **ponto limite**, de S é um ponto cujas vizinhanças subentendem pontos de S diferentes dele mesmo. **Ponto isolado** de S é um ponto de S que não é de acumulação.

10.6 Interior de um conjunto S é o conjunto $\text{Int}(S)$ de todos os pontos interiores de S .

10.6.1 $\text{Int}(S)$ é

- (i) a união de todos os abertos contidos em S ;
- (ii) igual a S se, e somente se, S é aberto.

10.7 Fecho de um conjunto S é o conjunto $\text{Fech}(S)$, também denotado por $\overline{S}$, de todos os pontos aderentes de S .

10.7.1 $\text{Fech}(S)$ é

- (i) a interseção de todos os fechados que contém S ;
- (ii) igual a S se, e somente se, S é fechado.

10.8 Fronteira de um conjunto S é o conjunto $\text{Fron}(S)$, também denotado por ∂S , de todos os pontos fronteirios de S .

10.8.1 (i) $\text{Fron}(S) = \text{Fech}(S) \setminus \text{Int}(S)$; (ii) $\text{Fron}(S) = \text{Fron}(\mathbb{C}S)$;
(iii) $\text{Fron}(S) = \text{Fech}(S) \cap (\mathbb{C}\text{Int}(S))$. (iv) Se S é aberto, $S \cap \text{Fron}(S) = \emptyset$;
se S é fechado, $S \supset \text{Fron}(S)$.

10.9 Derivado de um conjunto S é o conjunto $\text{Der}(S)$, também denotado por S' , de todos os pontos de acumulação de S .

10.9.1 (i) $\text{Fech}(S) = S \cup \text{Der}(S)$; (ii) Se S é fechado se, e somente se, contém seu derivado.

10.10 Um subconjunto S de X é dito **denso** em X se é igual ao seu fecho.

10.11 Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **de Hausdorff** se pontos distintos de X possuem vizinhanças que não se interceptam.

10.11.1 Pares de pontos com essa propriedade são ditos **separáveis** (na topologia em consideração). Assim, um espaço é de Hausdorff se dois de seus pontos distintos quaisquer são separáveis.

10.12 Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ converge para $x \in X$ se para qualquer vizinhança V de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

10.12.1 Nesse caso dizemos que a sequência é **convergente** e que x é seu **limite**.

10.13 Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita **contínua em X** se a pré-imagem de qualquer aberto em Y é um aberto em X , *i.e.*, se $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

10.13.1 Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita **contínua em $x_0 \in X$** se para qualquer vizinhança de $f(x_0)$ existe uma vizinhança de x_0 tal que a imagem através de f da vizinhança de x_0 está contida na vizinhança de $f(x_0)$.

10.13.2 $f : X \rightarrow Y$ é contínua em X se, e somente se, é contínua em cada ponto de X .

10.13.3 A composta de duas funções contínuas, quando existe, é contínua.

10.13.4 $f : X \rightarrow Y$ é contínua em X , então:

- (i) sua restrição $f|(A, Y)$, na qual A é um subespaço de X , é contínua;
- (ii) sua abreviação $f|(X, f(X))$ é contínua;

10.13.5 $f : X \rightarrow Y$ é contínua em X se, e somente se, a pré-imagem de qualquer aberto de uma base em Y é um aberto em X .

10.13.6 $f : X \rightarrow Y$ é contínua em X se, e somente se, a pré-imagem de qualquer fechado em Y é um fechado em X .

10.14 Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita um **homeomorfismo** se é contínua, possui inversa e a inversa é contínua.

10.14.1 Se existe um homeomorfismo de X em Y , dizemos que X é **homeomorfo** a Y , e escrevemos $X \simeq Y$.

10.14.2 A relação de homeomorfismo entre espaços topológicos é de equivalência.

10.14.3 Invariante topológico é uma propriedade de espaços topológicos que é invariante por homeomorfismos, isto é, é uma propriedade das classes de equivalência da relação de homeomorfismo entre espaços topológicos.

10.15 Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **conexo** se não é a união de dois conjuntos abertos disjuntos, *i.e.*, se não existem $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$ tais que $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Um espaço que não é conexo é dito **desconexo**.

10.15.1 Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **conexo por arcos** se, para qualquer par de pontos $a, b \in X$, existir uma função contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$.

10.15.2 Todo espaço conexo por arcos é conexo.

10.16 Seja A um conjunto e $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma família de conjuntos. Dizemos que a família é uma **cobertura** de A se $A \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$.

10.16.1 Seja $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma cobertura de A .

(i) Se $\mathcal{A}$ é finito, dizemos que a cobertura é finita.

(ii) Se $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ e $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ também é cobertura de A , dizemos que $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}_1\}$ é uma subcobertura de A .

10.16.2 Obviamente, (i) se para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $A_\alpha \subset A$, então $A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$;

(ii) toda partição de A é uma cobertura de A constituída por conjuntos disjuntos.

10.16.3 Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $A \subset X$, denominamos **cobertura aberta** de A a uma cobertura constituída de conjuntos abertos de X .

10.17 Sejam dois espaços topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$ e a família de conjuntos $\{U_1 \times U_2 | U_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ e } U_2 \in \mathcal{T}_2\}$. Essa família constitui-se em um base para a topologia de $X_1 \times X_2$ que denotamos por $\mathcal{T}_{X_1 \times X_2}$.

10.17.1 $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_{X_1 \times X_2})$ é chamado **produto dos espaços topológicos** $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$.

10.18 Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **compacto** se cada cobertura aberta de X tem uma subcobertura finita.

10.18.1 Um subconjunto $A \subset X$ é dito **compacto** em X se cada cobertura aberta de A tem uma subcobertura finita. Um subconjunto é compacto em X se, e somente se, quando munido da topologia induzida é compacto como espaço topológico.

10.18.2 Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito **localmente compacto** se cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança aberta cujo fechamento é compacto.

10.18.3 Um subspaço de um espaço topológico compacto é compacto se, e somente se, é fechado; em particular, todo espaço compacto é fechado.

11. Espaço métrico

11.1 Métrica, ou **distância** em um conjunto X é função

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto d(x, y) , \quad (51)$$

tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$,

(d1) $d(x, y) \geq 0$; além disso, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(d3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

11.1.1 (i) (X, d) (e por abuso de linguagem, X) é chamado **espaço métrico**;

(ii) Os elementos de X são chamados **pontos**.

11.1.2 $(\mathbb{R}, d)$, onde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|$, é espaço métrico.

11.1.3 $(\mathbb{R}^n, d)$, onde

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2},$$

é espaço métrico. Essa métrica é chamada **métrica usual**, ou **métrica euclidiana**, de $\mathbb{R}^n$.

11.1.4 $(\mathbb{R}^n, d)$, onde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \max\{|x^1 - y^1|, \dots, |x^n - y^n|\}$, é espaço métrico.

11.1.5 Se X é qualquer conjunto não vazio, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, com $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ define uma métrica em X , chamada **métrica discreta** em X .

11.2 Em um espaço métrico (X, d) definimos **bola aberta** de centro em $x \in X$ e raio $r \in \mathbb{R}_{\geq}$, denotada por $B_x(r)$, como sendo o subconjunto $B_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$.

11.2.1 $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{\geq}$ e $r_1 \leq r_2 \Rightarrow B_x(r_1) \subset B_x(r_2)$.

11.3 Um subconjunto A de X é dito **aberto em um espaço métrico** (X, d) se qualquer ponto do subconjunto é centro de uma bola aberta contida nele mesmo.

11.3.1 O conjunto de todos os conjuntos abertos no espaço métrico (X, d) é denotado por $\mathcal{T}_{(X, d)}$.

11.4 $\mathcal{T}_{(X,d)}$ é uma topologia em X .

11.4.1 $\mathcal{T}_{(X,d)}$ é chamada **topologia induzida pela métrica d** em X .

11.4.2 A topologia induzida em $\mathbb{R}^n$ pela sua métrica usual (Cf. **2.1.3**) é chamada **topologia usual de $\mathbb{R}^n$** .

11.4.3 A topologia induzida em qualquer conjunto X não vazio pela sua métrica discreta (Cf. **11.1.5**) é a topologia discreta (Cf. **1.1.4 (ii)**).

11.5 Qualquer espaço com topologia induzida por métrica é de Hausdorff.

11.6 Em um espaço métrico (X, d) definimos **bola fechada** de centro em $x \in X$ e raio $r \in \mathbb{R}_{\geq}$, denotada por $\overline{B}_x(r)$, como sendo o subconjunto $B_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$.

11.6.1 Em um espaço métrico (X, d) um subconjunto $A \subset X$ é dito **cotado** se existir uma bola fechada em X que contém A ; o raio da bola fechada é chamado uma **cota** de A .

11.6.2 Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e cotado (Heine-Borel).

11.7 Em um espaço métrico (X, d) , dizemos que uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ **converge no espaço métrico** para um ponto $l \in X$ se, para qualquer número positivo ϵ , existir um número natural N tal que:
 $n > N \Rightarrow d(x_n, l) < \epsilon$. O ponto l é chamado de limite da sequência, que é dita **convergente**.

11.7.1 Em um espaço métrico (X, d) , $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ é dita uma **sequência de Cauchy no espaço métrico** se, para qualquer número positivo ϵ , existir um número natural N tal que: $m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.

11.7.2 Um espaço métrico é dito **completo** se toda sequência de Cauchy no espaço é convergente.

12. Espaço de Banach

12.1 Norma em um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é, por definição, uma função $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ tal que, para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

(N1) $\|x\| \geq 0$; além disso: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

12.1.1 $(V, \| \cdot \|)$ (e por abuso de linguagem, V) é chamado **espaço vetorial normado**.

12.2 d definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma distância no conjunto V , que chamamos **métrica induzida pela norma** de V . Portanto, todo espaço normado $(V, \| \cdot \|)$ é um espaço métrico (V, d) , com a métrica d induzida pela norma.

12.2.1 A métrica d em V induz uma topologia $\mathcal{T}_{V,d}$ em V , que chamamos **topologia induzida pela norma**.

12.3 Um **espaço vetorial topológico** é um espaço vetorial V munido de uma topologia na qual as operações de adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores são contínuas. Os espaços vetoriais normados com topologia induzida pela norma são espaços vetoriais topológicos.

12.3.1 Base topológica de um espaço vetorial topológico V é um conjunto $\mathcal{B} \in V$ de vetores LI tal que $\overline{\mathbb{K}\mathcal{B}}$ é denso em V , isto é, $\overline{\mathbb{K}\mathcal{B}} = V$. Um espaço vetorial topológico é dito **separável** se possui uma base topológica contável; nesse caso também é separável enquanto apenas espaço topológico.

12.4 Um espaço normado é dito **espaço de Banach** se é completo enquanto espaço métrico definido pela métrica induzida pela norma.

12.4.1 O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana d é um espaço de Banach se munido da norma $\|x\| = d(0, x)$.

NB: Espaços de Banach proporcionam o ambiente natural para o cálculo diferencial, o cálculo das variações e as equações diferenciais ordinárias. O cálculo diferencial e as equações diferenciais são a linguagem natural da cinemática e dinâmica de MC e o cálculo das variações, a da formulação analítica da mecânica.

12.5 Sejam $(X, \| \cdot \|_X)$ e $(Y, \| \cdot \|_Y)$ espaços de Banach sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, $\mathcal{D}$ um aberto de X e $F : \mathcal{D} \rightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que F é **diferenciável** em $v \in \mathcal{D}$ se existem $F'(v) \in L_{\mathbb{K}}$ e $\alpha : X \times X \rightarrow Y$ tal que, para qualquer $h \in X$ para o qual $v + h \in \mathcal{D}$,

$$F(v + h) - F(v) = F'(v)h + \alpha(v, h) ,$$

onde

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|h\|_Y}{\|h\|_X} .$$

12.5.1 (i) Se F é diferenciável em v , $F'(v)$ é única e chamada **derivada de Fréchet** de F em v .

(ii) $F'(v)h$ é chamada **variação tangente**, ou **diferencial**, de F com incremento h a partir de v . Podemos denotar esse diferencial por $dF(v, h)$ ou, abreviadamente, por dF .

(iii) Para abreviar a notação escrevemos $\| \cdot \|$ tanto no lugar de $\| \cdot \|_X$ quanto no de $\| \cdot \|_Y$.

12.5.2 Se a derivada de $F : \mathcal{D} \rightarrow Y$ existe em cada $v \in \mathcal{D}$ dizemos que F é diferenciável em $\mathcal{D}$ e definimos **função derivada de Fréchet** em $\mathcal{D}$ como sendo a função $F' : \mathcal{D} \rightarrow Y : v \mapsto F'(v)$.

12.5.3 (i) Representamos por $\mathcal{C}^1(\mathcal{D}, Y)$ o conjunto das funções de $\mathcal{D}$ em Y com derivada contínua em $\mathcal{D}$.

(ii) Se $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, Y)$, definimos a **derivada segunda** de F como sendo a derivada de F' . Representamos por $\mathcal{C}^2(\mathcal{D}, Y)$ o conjunto das funções de $\mathcal{D}$ em Y com derivada segunda contínua em $\mathcal{D}$.

(iii) Recursivamente, definimos **derivada de ordem k** e o conjunto $\mathcal{C}^k(\mathcal{D}, Y)$ das funções com derivada de ordem k contínua.

(iv) O conjunto das funções com derivadas de todas as ordens é representado por $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, Y)$.

12.5.4 Se F é diferenciável em $\mathcal{D}$, para qualquer $v \in \mathcal{D}$ e $h \in X$,

$$F'(v)h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(v + \varepsilon h) - F(v)] ,$$

NB: Um caso particular dessa derivada é a chamada **derivada funcional**, ou **derivada de Volterra**, usada em cálculo das variações e no formalismo funcional da mecânica e da teoria de campos. O cálculo diferencial em espaços de Banach tem como caso particular o cálculo diferencial de funções de abertos de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$; usando derivadas obtemos a segunda lei de Newton a partir do **princípio do determinismo clássico**.

13. Espaço de Hilbert

13.1 Multiplicação interna em um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é, por definição, uma função $: V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto (x|y)$ tal que, para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$(MI1) \quad (x|y + z) = (x|y) + (x|z);$$

$$(MI2) \quad (x|\alpha y) = \alpha(x|y);$$

$$(MI3) \quad (x|y)^* = (y|x);$$

$$(MI4) \quad (x|x) \geq 0; \text{ além disso, } (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

13.1.1 O escalar $(x|y)$ é chamado **produto interno** de x por y .

13.1.2 Um espaço vetorial munido de uma multiplicação interna é chamado **espaço com produto interno**, ou **espaço pré-hilbertiano**.

13.1.3 $: V \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ define uma norma em V , chamada **norma induzida pela multiplicação interna** de V . Portanto, um espaço pré-hilbertiano é um espaço normado e conseqüentemente, um espaço métrico com a métrica induzida por essa norma e um espaço topológico com a topologia induzida por essa métrica.

13.2 Um espaço pré-hilbertiano é dito um **espaço de Hilbert** se é completo enquanto espaço métrico com métrica induzida pela norma induzida pela sua multiplicação interna.

13.3 (i) Dois vetores em um espaço com multiplicação interna são ditos **ortogonais** se o produto interno deles é zero.

(ii) Um vetor em um espaço com multiplicação interna é dito **normal**, ou **unitário**, se sua sua norma (definida pela multiplicação interna) é 1.

(iii) Um conjunto de vetores é dito **ortonormal** se os seus vetores são normais e ortogonais dois a dois.

13.3.1 Base hilbertiana de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um conjunto $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$ ortonormal tal que $\overline{\mathbb{K}\mathcal{B}}$ é denso em $\mathcal{H}$, isto é, $\overline{\mathbb{K}\mathcal{B}} = \mathcal{H}$.

13.3.2 Todo espaço de Hilbert possui uma base hilbertiana. Todas as bases hilbertianas de um espaço de Hilbert têm a mesma cardinalidade, chamada **dimensão hilbertiana** do espaço de Hilbert.

13.3.3 Espaços de Hilbert com a mesma cardinalidade são isomorfos.

13.3.4 Espaço dual topológico de um espaço de Hilbert é o subespaço do dual constituído pelos funcionais lineares contínuos.

13.3.5 Teorema de Riesz. Existe um isomorfismo natural entre qualquer espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seu dual topológico $\mathcal{H}'$, dado por $: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' : x \mapsto x^\wedge$, onde $x^\wedge(y) = (x|y)$ para todo $y \in \mathcal{H}$.

13.3.6 Um espaço de Hilbert é dito **separável** se possui uma base hilbertiana contável.

- 13.3.7 (i)** Seja o conjunto de funções $[a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ quadraticamente integráveis e a relação de equivalência entre elas que consiste em diferir apenas em um subconjunto de $[a, b]$ com medida nula. Seja $L_{\mathbb{C}}^2([a, b])$ o quociente entre o conjunto de funções e a relação.
- (ii)** $L_{\mathbb{C}}^2([a, b])$ é espaço vetorial se munido das operações naturais de adição e de multiplicação por escalar.
- (iii)** $L_{\mathbb{C}}^2([a, b])$ é espaço de Hilbert se munido da multiplicação interna $: L_{\mathbb{C}}^2([a, b]) \times L_{\mathbb{C}}^2([a, b]) \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto (f|g)$, onde

$$(f|g) = \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

e f e g no integrando devem ser interpretadas como elementos das classes respectivas f e g .

- 13.4 (i)** Dado um operador contínuo T sobre um espaço de Hilbert H , seu adjunto $T^\dagger$ fica definido por $(T^\dagger x|y) = (x|Ty)$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.
- (ii)** O operador T é dito **unitário** se é invertível e $T^{-1} = T^\dagger$; se T é unitário $(Tx|Ty) = (x|y)$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.
- (iii)** O operador é dito autoadjunto se $T^\dagger = T$.
- (iii)** Espectro de T é o conjunto $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(T)$ dos escalares λ para os quais $T - \lambda \text{id}_{\mathcal{H}}$ não é bijetor; se T é autoadjunto, seu espectro é real.

NB: Os estados dos sistemas em MQ são vetores em um espaço de Hilbert (equipado!); as grandezas mensuráveis de um sistema são representadas por operadores autoadjuntos sobre o espaço; os resultados das medições de uma grandeza são elementos do espectro do operador correspondente. A evolução temporal do sistema quântico isolado é realizada por um operador unitário, de acordo com o **princípio do determinismo quântico**, o que implica na equação de Schrödinger do sistema. Os estados de uma partícula quântica em movimento unidimensional confinado no intervalo $[a, b]$ são elementos de $L^2_{\mathbb{C}}([a, b])$.

14. Variedade diferenciável

14.1 Um conjunto $\mathcal{M}$ é dito uma **variedade** (topológica) se é um espaço topológico de Hausdorff no qual cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. A dimensão n desse espaço é dita a **dimensão da variedade**.

14.1.1 Uma **carta** na variedade $\mathcal{M}$ é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de um aberto U de $\mathcal{M}$ sobre um aberto V de $\mathbb{R}^n$.

14.1.2 Se $x \in U \subset \mathcal{M}$, dizemos que x é um ponto na carta φ e as coordenadas $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(x)$ em $\mathbb{R}^n$ são chamadas **coordenadas** de x na carta φ .

14.1.3 (i) Uma função de um aberto em outro de $\mathbb{R}^n$ é dita de classe $\mathcal{C}^k$ se sua derivada de ordem k existe e é contínua.

(ii) Duas cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ e $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ definem as abreviações bijetoras $\varphi_\alpha^{-1}|(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), (U_\alpha \cap U_\beta))$ e $\varphi_\beta|((U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))$, cuja composição escrevemos como

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

e chamamos **função de transição** das cartas.

(iii) As duas cartas φ_α e φ_α são ditas $\mathcal{C}^k$ -**compatíveis** se têm função de transição de classe $\mathcal{C}^k$.

14.1.4 (i) Um **atlas** de classe $\mathcal{C}^k$ em uma variedade $\mathcal{M}$ é uma família $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ de cartas na variedade que são compatíveis duas a duas e cujos domínios cobrem a variedade, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \mathcal{M}$.

(ii) Dois atlas de classe $\mathcal{C}^k$ são **compatíveis** se sua união é um atlas de classe $\mathcal{C}^k$. A relação de compatibilidade entre atlas é de equivalência **(iii)** Uma classe de equivalência de atlas compatíveis de classe $\mathcal{C}^k$ em uma variedade é chamada uma **estrutura** $\mathcal{C}^k$ na variedade.

14.1.5 Uma variedade topológica munida de uma estrutura $\mathcal{C}^k$ é chamada uma **variedade** $\mathcal{C}^k$.

14.2 (i) Se substituirmos a condição $\mathcal{C}^k$ para as funções de transição por $\mathcal{C}^\infty$ a variedade é dita **suave**.

(ii) Se substituirmos a condição $\mathcal{C}^k$ das funções de transição pela condição de serem reais analíticas a variedade é dita **real analítica**.

(iii) Se substituirmos $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ e a condição $\mathcal{C}^k$ das funções de transição pela condição das funções serem complexas analíticas a variedade dita **complexa analítica**.

(iv) Uma variedade de dimensão infinita é obtida substituindo-se $\mathbb{R}^n$ por um espaço de Banach.

14.3 Um exemplo instrutivo de variedade diferenciável é dado pelo espaço de configurações S^2 de um pêndulo esférico.

14.4 (i) Sejam duas variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ suaves e o produto delas $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ enquanto espaços topológicos.

(ii) Dados os atlas $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ em $\mathcal{M}$ e $\{\varphi'_{\alpha'} : U'_{\alpha'} \rightarrow V'_{\alpha'} | \alpha' \in \mathcal{A}'\}$ em $\mathcal{M}'$, as funções

$$\varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'} : U_\alpha \times U'_{\alpha'} \rightarrow V_\alpha \times V'_{\alpha'} : (x, x') \mapsto (\varphi_\alpha(x), \varphi'_{\alpha'}(x')) \quad (\alpha \in \mathcal{A}, \alpha' \in \mathcal{A}')$$

são cartas em $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ e formam um atlas.

(iii) $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ munido da classe de equivalência desse atlas é uma variedade suave, chamada **variedade produto** de $\mathcal{M}$ por $\mathcal{M}'$.

14.5 Um **grupo de Lie** é um grupo G que é também uma variedade real suave de dimensão finita tal que $: G \times G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ é diferenciável na variedade produto $G \times G$.